МЕХАНИКА

УДК 534.1; 539.3

ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

© 2009 А.А. Авраменко, М.В. Борисов[1]

Целью работы является получение математической модели движения составной упругой системы. Поиск собственных форм и частот предлагается проводить путем разложения колебаний по формам неподвижных элементов. Это позволяет преобразовать уравнения движения в частных производных в обыкновенные дифференциальные уравнения. Проведено моделирование движения космического аппарата, в состав которого входят упругие элементы большой протяженности (панели солнечных батарей).

Ключевые слова: составная упругая система, собственные частоты колебаний, собственные формы колебаний, дифференциальные уравнения движения, упругий космический аппарат, панели солнечных батарей, метод Релея — Ритца, принцип Гамильтона — Остроградского.

Введение

Тенденции увеличения размеров деформируемых конструкций, уменьшения их масс, жесткости и ряд других факторов требуют новых подходов моделирования сложных механических систем, развития методов их качественного анализа, численного интегрирования.

В изданных на данный момент публикациях основное внимание уделяется исследованию стационарных вращательных движений упругих систем или движения вокруг центра масс системы [1—5]. Так, в работе [1] рассматривается задача о геоцентрической стабилизации космического аппарата (КА) с управляемой солнечной батареей, движущегося по круговой орбите. Расчетная модель аппарата представлена в виде абсолютно жесткого тела (контейнера) с упруго связанными с ним посредством сфериче-

[1]Авраменко Александр Алексеевич (avramenko_a_a@mail.ru), Борисов Максим Владимирович (borisov.makson@rambler.ru), кафедра теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета, 443086, Россия, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34.

ских шарниров панелей солнечных батарей (ПСБ), которые моделируются недеформируемыми стержнями. Однако данный подход к моделированию может быть использован на ранних этапах исследования движения КА с ПСБ.

Наиболее распространенным и "точным" методом компьютерного моделирования составных упругих конструкций в настоящее время является метод конечных элементов [11, 12]. Однако точность данного метода зависит от количества конечных элементов. Соответственно, учитывание большего числа конечных элементов требует больших затрат машинного времени. Кроме того, метод конечных элементов дает значения динамических характеристик в точках выбранных конечных элементов, а при изменении конструкции моделируемой системы требует перестройки всей конечно-элементной сетки.

Поскольку размер ПСБ велик, а конструкция не позволяет рассматривать их как твердые тела, то дифференциальные уравнения движения ПСБ будут представлять собой уравнения в частных производных как для тел с распределенными параметрами. В данной работе предлагается метод получения более точной математической модели движения КА с ПСБ. При этом дифференциальные уравнения движения не содержат частных производных.

1. Вывод математической модели движения

1.1. Определение собственных форм и частот системы

Сложная упругая система представляет собой конструкцию, состоящую из стержневых элементов, пластин и иных элементов, которые в пределах достаточно малых деформаций могут рассматриваться как упругие. Результатом взаимодействия упругой конструкции с прочими подсистемами и с внешней средой являются ее колебания. Важным этапом исследования динамического поведения разрабатываемой системы является определение динамических характеристик ее упругой конструкции, к числу которых относятся собственные частоты и формы колебаний. Обычно упругая конструкция представляет собой сложную систему, составленную из относительно более простых подконструкций, механически соединенных между собой и взаимодействующих в процессе совместных колебаний. Для моделирования движения подобной системы предлагается рассматривать систему по частям с последующим синтезом результатов, полученных для каждой части конструкции.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать комбинацию методов Релея — Ритца и Фурье [6]. Согласно методу Релея — Ритца, предполагается известным, что в числе движений, реализуемых в системе, при надлежащем образом подобранных начальных условиях существуют главные колебания.

Векторы перемещений отдельных элементов системы представлены в виде:

$$f(x,t) = F(x)\sin(\omega t + \epsilon), \tag{1.1}$$

где x — координата характерного размера элемента, $F(x)$ — главная форма колебания, ω — собственная частота.

Для определения собственных форм и частот колебаний системы и дальнейшего получения дифференциальных уравнений предлагается использовать принцип Гамильтона — Остроградского [7]:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} (T - \Pi - U)\, dt. \tag{1.2}$$

Здесь T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия внешних сил, U – потенциальная энергия упругой деформации элемента. Представления для векторов перемещений (1.1) подставляются в выражение (1.2). Берется интеграл по времени на промежутке, равному периоду $[0; 2\pi]$. В результате получаем

$$S = \omega^2 \cdot \pi \cdot T - \pi \cdot \Pi - \pi \cdot U. \tag{1.3}$$

Далее воспользуемся методом Фурье. Главные формы колебаний отдельных элементов системы представлены в виде:

$$F(x) = \sum_n d_n X_n(x), \tag{1.4}$$

$$F(x,y) = \sum_{m,n} d_{m,n} X_m(x) Y_n(y). \tag{1.5}$$

Разложение (1.4) — для стержня, (1.5) — для пластины.

Функции $X_m(x), Y_n(y)$ — базисные функции, т. е. известные функции, подбираемые в соответствии с краевыми условиями задачи, $d_n, d_{m,n}$ — корректирующие параметры, значения которых после подстановки (1.4) и (1.5) в выражение функционала (1.3) определяются из условий минимума функционала S.

В качестве базисных функций предлагается использовать собственные формы колебаний однородного стержня при тех же условиях закрепления, что и для исследуемой системы [8]. В приближенном решении число собственных форм может быть взято конечным и часто весьма небольшим. Это сводит задачу к рассмотрению системы с конечным числом степеней свободы и исключает из рассмотрения весьма трудно учитываемые колебания высоких частот. При моделировании движения рассматриваемой системы ограничимся двумя формами в разложениях (1.4) и (1.5).

Коэффициенты $d_n, d_{m,n}$ в разложениях (1.4) и (1.5) позволяют восстановить реальные формы колебаний упругих элементов рассматриваемой системы.

Функции X представляют собой собственные формы колебаний стержня, жестко защемленного с одного конца:

$$X_n(x) = \left(\cosh\frac{k_n l \cdot x}{l} - \cos\frac{k_n l \cdot x}{l}\right) + C_n\left(\sinh\frac{k_n l \cdot x}{l} - \sin\frac{k_n l \cdot x}{l}\right), \quad (1.6)$$

где $C_n = -\dfrac{\cosh(k_n l) + \cos(k_n l)}{\sinh(k_n l) + \sin(k_n l)}$.

Величины $k_n l$ определяются из соотношения $\cos(k_n l)\cosh(k_n l) = -1$.

Функции Y представляют собой собственные формы колебаний стержня со свободными концами:

$$Y_n(y) = \left(\cosh\frac{k_n l \cdot y}{l} + \cos\frac{k_n l \cdot y}{l}\right) + C_n\left(\sinh\frac{k_n l \cdot y}{l} + \sin\frac{k_n l \cdot y}{l}\right), \quad (1.7)$$

где $C_n = -\dfrac{\cosh(k_n l) - \cos(k_n l)}{\sinh(k_n l) - \sin(k_n l)}$.

Величины $k_n l$ определяются из соотношения $\cos(k_n l)\cosh(k_n l) = 1$.

Формы колебаний пластины представлены как произведение форм колебаний жестко защемленного стержня (1.6) и свободного стержня (1.7). Это соответствует способу закрепления пластины в рассматриваемой системе.

Выражения (1.4) и (1.5) подставляются в функционал (1.2). При этом необходимо учесть, что собственные формы колебаний (1.6) и (1.7) являются ортогональными функциями.

Неизвестные коэффициенты в разложениях (1.4) и (1.5) находятся из условия минимума функционала (1.3):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial d_k} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial d_{l,p}} = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

где $k = \overline{1,n}, l = \overline{1,m}, p = \overline{1,n}$.

Вид системы (1.8) определяется конфигурацией моделируемой системы, типом элементов, входящих в ее состав.

Система (1.8) является линейной относительно неизвестных коэффициентов d_k и $d_{l,p}$. Требование обращения в нуль ее определителя приводит к частотному уравнению относительно ω_k^2. Каждому из значений ω_k^2 соответствует система значений коэффициентов d_k и $d_{l,p}$, определенная с точностью до произвольного множителя.

Система полученных коэффициентов позволяет оценить вклад каждой учитываемой формы собственных колебаний. С помощью полученных ча-

стот и коэффициентов разложения восстанавливаются искомые формы колебаний.

1.2. Вывод дифференциальных уравнений движения системы

Для получения системы дифференциальных уравнений движения представим упругие перемещения в виде разложения:

$$f(x,t) = d(t)F(x). \tag{1.9}$$

В данных разложениях функции $F(x)$ — формы колебаний, полученные из (1.4) и (1.5).

Из принципа Гамильтона — Остроградского:

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta\Pi - \delta U)\, dt = 0. \tag{1.10}$$

Распишем каждые вариации, принимая коэффициенты, зависящие от времени в (1.9), за обобщенные координаты: $q(t) = d(t)$.

$T = \sum\limits_i T_i$ — сумма кинетических энергий отдельных элементов системы.

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{1.11}$$

Найдем интеграл по времени от (1.11):

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i\right) dt = \\
&= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\partial q_i\Bigg|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (\delta q_i)\, d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i\, dt = \\
&= -\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i{}^2}\ddot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \delta q_i\, dt.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Для потенциальной энергии

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{1.13}$$

Здесь так же, как и для кинетической энергии, под Π понимается сумма потенциальных энергий отдельных элементов системы, т. е. $\Pi = \sum\limits_i \Pi_i$.

Для энергии упругой деформации:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{1.14}$$

Аналогично под U понимается сумма энергий отдельных элементов системы, т. е. $U = \sum\limits_i U_i$.

Поскольку вариации независимы, то для того чтобы выражение (1.10) обращалось в нуль, необходимо, чтобы выражения перед вариациями обращались в нуль.

В результате подстановки (1.12) — (1.14) в (1.10) получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i{}^2}\ddot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \qquad (1.15)$$

Уравнение (1.15) представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, содержащих только обыкновенные производные по времени. Уравнений столько, сколько неизвестных коэффициентов в разложении (1.9). Для каждой собственной частоты будет своя система (1.15).

2. Моделирование движения упругого космического аппарата

В качестве примера применения предлагаемого в настоящей работе метода проведем моделирование движения КА, в состав которого входят как твердые элементы — его корпус, так и упругие — панели солнечных батарей.

Решение задачи моделирования движения КА при раскрытии ПСБ будем проводить в два этапа. На первом этапе — *раскрытие ПСБ* — рассмотрим движения створок ПСБ как системы твердых пластин, соединенных шарнирами. На втором этапе — *фиксация ПСБ* — рассмотрим движение КА при колебаниях ПСБ, возникающих под воздействием импульсных нагрузок, появляющихся в момент фиксации частей ПСБ.

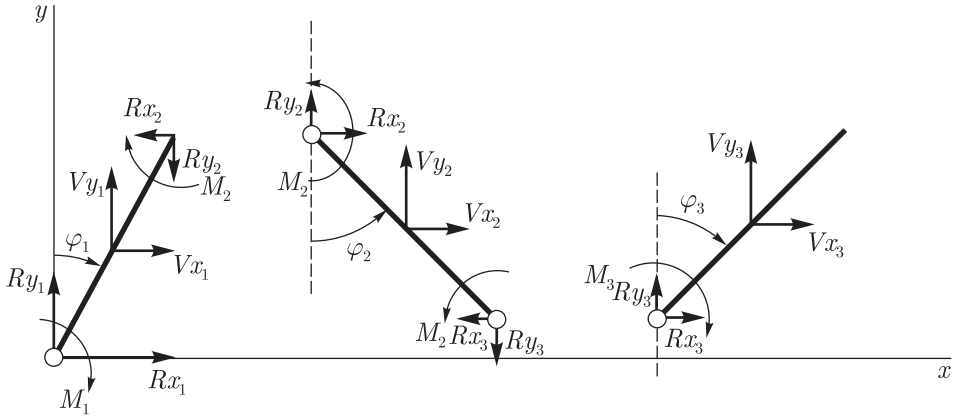


Рис. 2.1. Расчетная схема раскрытия ПСБ: Rx_1, Rx_2, Rx_3, Ry_1, Ry_2, Ry_3 — реакции в шарнирах в процессе раскрытия: M_1, M_2, M_3 — внешние моменты в створках: M_{R1}, M_{R2}, M_{R3} — удерживающие моменты в шарнирах при фиксации створок

2.1. Раскрытие ПСБ

Построение математической модели процесса раскрытия ПСБ является первым и важным шагом. Модель должна быть в разумной степени адекватна физическому процессу и не быть слишком громоздкой. При решении поставленной задачи использовались следующие допущения:

1. Фиксация створок происходит мгновенно и одновременно.
2. Корпус КА совершает инерциальное движение.
3. Створки ПСБ — абсолютно твердые тела.

Рассмотрим ПСБ, состоящую из трех створок (рис. 2.1).

Для составления дифференциальных уравнений, моделирующих раскрытие ПСБ, воспользуемся уравнением Д'Аламбера — Лагранжа [9].

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = Rx_1 - Rx_2, \\ m_1\ddot{y}_2 = Ry_1 - Ry_2, \\ m_2\ddot{x}_2 = Rx_2 - Rx_3, \\ m_2\ddot{y}_2 = Ry_2 - Ry_3, \\ m_3\ddot{x}_3 = Rx_3, \\ m_3\ddot{y}_3 = Ry_3, \\ J_1\ddot{\varphi}_1 = (Rx_1 + Rx_2)\dfrac{l_1}{2}\cos(\varphi_1) - (Ry_1 + Ry_2)\dfrac{l_1}{2}\sin(\varphi_1) - \\ \qquad - (M_1 + M_2) - (M_{R1}\delta_1 + M_{R2}\delta_2), \\ J_2\ddot{\varphi}_2 = -(Rx_2 + Rx_3)\dfrac{l_2}{2}\cos(\varphi_2) - (Ry_2 + Ry_3)\dfrac{l_2}{2}\sin(\varphi_2) + \\ \qquad + (M_2 + M_3) + (M_{R2}\delta_2 + M_{R3}\delta_3), \\ J_3\ddot{\varphi}_3 = Rx_3\dfrac{l_3}{2}\cos(\varphi_3) - Ry_3\dfrac{l_3}{2}\sin(\varphi_3) - M_3 - M_{R3}\delta_3. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $\delta_i = \delta_i(\varphi_i)$ — функция переключения, отражающая факт фиксации створок ПСБ.

Систему (2.1) необходимо дополнить уравнениями связи, отражающими тот факт, что общие точки смежных панелей имеют одинаковые координаты, скорости, ускорения:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - \dfrac{l_1}{2}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1) + \dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1) = 0, \\ \ddot{y}_1 + \dfrac{l_1}{2}\ddot{\varphi}_1\sin(\varphi_1) + \dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}_1^2\cos(\varphi_1) = 0, \\ \ddot{x}_1 + \dfrac{l_1}{2}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1) - \dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1) = \ddot{x}_2 - \dfrac{l_2}{2}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2) + \dfrac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2), \\ \ddot{y}_1 - \dfrac{l_1}{2}\ddot{\varphi}_1\sin(\varphi_1) - \dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}_1^2\cos(\varphi_1) = \ddot{y}_2 + \dfrac{l_2}{2}\ddot{\varphi}_2\sin(\varphi_2) + \dfrac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2\cos(\varphi_2), \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{l_2}{2}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2) - \dfrac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2) = \ddot{x}_3 - \dfrac{l_3}{2}\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_3) + \dfrac{l_3}{2}\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_3), \\ \ddot{y}_2 - \dfrac{l_2}{2}\ddot{\varphi}_2\sin(\varphi_2) - \dfrac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2\cos(\varphi_2) = \ddot{y}_3 + \dfrac{l_3}{2}\ddot{\varphi}_3\sin(\varphi_3) + \dfrac{l_3}{2}\dot{\varphi}_3^2\cos(\varphi_3). \end{cases} \tag{2.2}$$

Таким образом, получена система 15 дифференциальных уравнений, линейных относительно неизвестных вторых производных и реакций связей. Данная система может быть проинтегрирована любым численным методом.

Фиксация смежных створок между собой учитывается дополнительными связями:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1\delta_1 = 0, \\ (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2)\delta_2 = 0, \\ (\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_3)\delta_3 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Решая систему уравнений (2.1)—(2.3), находим скорости ПСБ в момент фиксации. Значения конечных скоростей необходимы для определения ударных импульсов в момент фиксации створок.

2.2. Фиксация створок ПСБ

Процесс фиксации смежных створок характеризуется потерей их относительной скорости движения, возникновением ударных реакций во всех шарнирных соединениях и скачкообразным изменением угловых и линейных скоростей всех створок. Расчетная схема фиксации створок ПСБ показана на рис. 2.2.

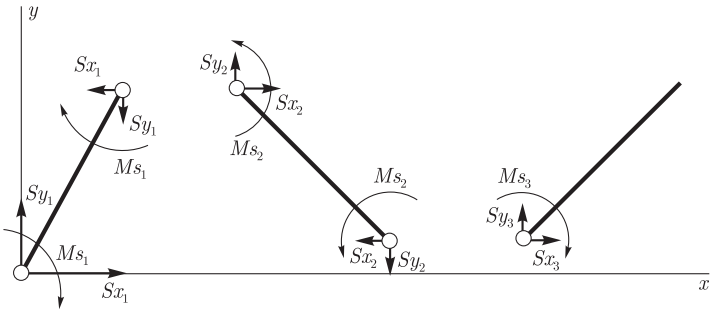


Рис. 2.2. Расчетная схема фиксации створок ПСБ

Процесс наложения мгновенных связей можно описать в соответствии с теорией удара следующими соотношениями, характеризующими изменение количества движения и момент количества движения системы [9]:

$$\begin{cases} m_1(\dot{x}_{1k} - \dot{x}_{10}) = Sx_1 - Sx_2, \\ m_1(\dot{y}_{1k} - \dot{y}_{10}) = Sy_1 - Sy_2, \\ m_2(\dot{x}_{2k} - \dot{x}_{20}) = Sx_2 - Sx_3, \\ m_2(\dot{y}_{2k} - \dot{y}_{20}) = Sy_2 - Sy_3, \\ m_3(\dot{x}_{3k} - \dot{x}_{30}) = Sx_3, \\ m_3(\dot{y}_{3k} - \dot{y}_{30}) = Sy_3, \\ J_1(\dot{\varphi}_{1k} - \dot{\varphi}_{10}) = (Sx_1 + Sx_2)\dfrac{l_1}{2}\cos(\varphi_1) - (Sy_1 + Sy_2)\dfrac{l_1}{2}\sin(\varphi_1) - M_{S1}\delta_1 - M_{S2}\delta_2, \\ J_2(\dot{\varphi}_{2k} - \dot{\varphi}_{20}) = -(Sx_2 + Sx_3)\dfrac{l_2}{2}\cos(\varphi_2) - (Sy_2 + Sy_3)\dfrac{l_2}{2}\sin(\varphi_2) - M_{S2}\delta_2 - M_{S3}\delta_3, \\ J_3(\dot{\varphi}_{3k} - \dot{\varphi}_{30}) = Sx_3\dfrac{l_3}{2}\cos(\varphi_3) - Sy_3\dfrac{l_3}{2}\sin(\varphi_3) - M_{S3}\delta_3. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь $\dot{x}_{i0}, \dot{y}_{i0}, \dot{\varphi}_{i0}, \dot{x}_{ik}, \dot{y}_{ik}, \dot{\varphi}_{ik}$ — скорости створок до и после фиксации, Sx_i, Sy_i — импульсные реакции в i-м шарнире при фиксации, M_{Si} — ударные импульсные моменты, возникающие в зафиксированном либо фиксирующемся i-м шарнире при фиксации одной из створок. Дополнительно воспользуемся уравнениями связи, аналогичными (2.2), но только для скоростей общих точек:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1k} - \dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}_{1k}\cos(\varphi_1) = 0, \\ \dot{y}_{1k} + \dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}_{1k}\sin(\varphi_1) = 0, \\ \dot{x}_{1k} + \dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}_{1k}\cos(\varphi_1) = \dot{x}_{2k} - \dfrac{l_2}{2}\dot{\varphi}_{2k}\cos(\varphi_2), \\ \dot{y}_{1k} - \dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}_{1k}\sin(\varphi_1) = \dot{y}_{2k} + \dfrac{l_2}{2}\dot{\varphi}_{2k}\sin(\varphi_2), \\ \dot{x}_{2k} + \dfrac{l_2}{2}\dot{\varphi}_{2k}\cos(\varphi_2) = \dot{x}_{3k} - \dfrac{l_3}{2}\dot{\varphi}_{3k}\cos(\varphi_3), \\ \dot{y}_{2k} - \dfrac{l_2}{2}\dot{\varphi}_{2k}\sin(\varphi_2) = \dot{y}_{3k} + \dfrac{l_3}{2}\dot{\varphi}_{3k}\sin(\varphi_3). \end{cases} \tag{2.5}$$

Уравнения связи, показывающие, что угловые скорости зафиксированных между собой створок равны (отсутствует вращение i-й створки относительно $i+1$-й), имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1\delta_1 = 0, \\ (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\delta_2 = 0, \\ (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)\delta_3 = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

При решении системы уравнений (2.1)—(2.3) с начальными условиями:

$$x_{10} = 0 \text{ м}, \ \dot{x}_{10} = 0,1 \text{ м/с}, \ x_{20} = 0 \text{ м}, \ \dot{x}_{20} = 0,1 \text{ м/с}, \ x_{30} = 0 \text{ м}, \ \dot{x}_{30} = 0,1 \text{ м/с},$$
$$y_{10} = \frac{l_1}{2} \text{ м}, \ \dot{y}_{10} = 0,1 \text{ м/с}, \ y_{20} = \frac{l_2}{2} \text{ м}, \ \dot{y}_{20} = 0,1 \text{ м/с}, \ y_{30} = \frac{l_3}{2} \text{ м}, \ \dot{y}_{30} = 0,1\text{м/с},$$
$$\varphi_{10} = 0 \text{ рад}, \ \dot{\varphi}_{10} = 0,1 \text{ рад/с}, \ \varphi_{20} = 0 \text{ рад}, \ \dot{\varphi}_{20} = 0,1 \text{ рад/с}, \ \varphi_{30} = 0 \text{ рад}, \ \dot{\varphi}_{30} = 0,1 \text{ рад/с}$$

получаются следующие значения скоростей в момент фиксации створок ПСБ:

$$\dot{x}_{10} = 0 \text{ м/с}, \ \dot{x}_{20} = 0 \text{ м/с}, \ \dot{x}_{30} = 0 \text{ м/с},$$
$$\dot{y}_{10} = -0,2426 \text{ м/с}, \ \dot{y}_{20} = -0,2426 \text{ м/с}, \ \dot{y}_{30} = -0,2426 \text{ м/с},$$
$$\dot{\varphi}_{10} = 0,097 \text{ рад/с}, \ \dot{\varphi}_{20} = 0,097 \text{ рад/с}, \ \dot{\varphi}_{30} = 0,097 \text{ рад/с}.$$

Решая систему уравнений (2.4)—(2.6) с учетом полученных значений скоростей, находим импульсные реакции и ударные импульсные моменты, возникающие в процессе фиксации створок ПСБ:

$$Sx_1 = 0 \text{ Н·с}, \; Sy_1 = 131.06 \text{ Н·с}, \; Sx_2 = 0 \text{ Н·с}, \; Sy_2 = 65.53 \text{ Н·с}, \; Sx_3 = 0 \text{ Н·с},$$
$$Sy_3 = 80.69 \text{ Н·с}$$
$$M_{S1} = -655.30 \text{ Н·м}, \; M_{S1} = 327.65 \text{ Н·м}, \; M_{S1} = 403.45 \text{ Н·м}.$$

Поскольку КА, имеющий в своей конструкции ПСБ, можно отнести к сложной упругой системе, то для исследования его движения после раскрытия ПСБ используем подход, предложенный в п. 1.

Рассмотрим конструкцию КА после раскрытия ПСБ, представленную на рис. 2.3. Данный КА является моделью элемента Международной космической станции (МКС). В качестве упругих элементов выступают стержень — модель отсека элемента МКС, пластина — модель ПСБ. Твердый полый цилиндр моделирует нерассматриваемую часть МКС. В качестве упругих элементов выступают стержень и пластина (ПСБ). Характеристики исследуемой системы представлены в табл. 2.1.

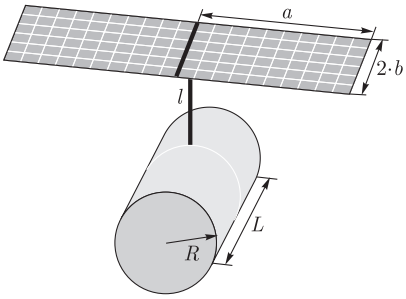
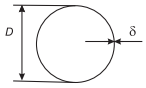
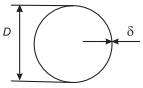


Рис. 2.3. Составная упругая система

Таблица 2.1

Характеристики исследуемой системы

Цилиндр		**Вертикальный стержень**		**Пластина**	
					
D, м	26	D, м	2	H, м	0,2
δ, м	0,02	δ, м	0,02	a, м	15
L, м	15	l, м	13	b, м	3,75

При моделировании движения рассматриваемой системы будем считать, что пластина является однородной с постоянной толщиной. Изгибные деформации пластины предполагаются подчиняющимися закону Гука. Упругая ось стержня в недеформируемом состоянии прямолинейна и совпадает с линией центров тяжести поперечных сечений стержня. Отклонения отдельных точек оси стержня происходят перпендикулярно к прямолинейному, недеформированному ее направлению.

Рассматривается поведение системы на коротком промежутке времени Δt. Поэтому возмущающее воздействие аэродинамического сопротивления, сил гравитации и светового давления не учитывается. Перемещения всей системы и ее отдельных элементов принимаются малыми.

Изменения длин упругодеформируемых элементов не учитываются. Вследствие того, что перемещения элементарной массы упругодеформируемого элемента вдоль его продольной оси значительно меньше, чем перемещения в направлениях, перпендикулярных этой оси, такими перемещениями для получения оценочных характеристик можно пренебречь.

Для исследуемой системы (табл. 2.1) определены первые две собственные частоты и соответствующие им коэффициенты в разложении собственных форм (табл. 2.2, 2.3).

Таблица 2.2

Распределение коэффициентов в разложении форм колебания для первой собственной частоты $\omega_1 = 0,69$ Гц

Перемещение цилиндра		Упругое перемещение вертикального стержня		Упругое перемещение пластин	
μ_1	1	d_1	0,0093	g_{11}	-0,024
μ_2	-1,3988	d_2	-0,0008	g_{12}	0,00014
μ_3	-0,0654	f_1	0,7084	g_{21}	0,00016
λ_1	-0,0011	f_2	-0,053	g_{22}	-0,000013
λ_2	0,0055	c	-0,0193		
λ_3	-0,0113				

Таблица 2.3

Распределение коэффициентов в разложении форм колебания для второй собственной частоты $\omega_2 = 1,27$ Гц

Перемещение цилиндра		Упругое перемещение вертикального стержня		Упругое перемещение пластин	
μ_1	1	d_1	-19,0683	g_{11}	51,2146
μ_2	-0,6081	d_2	1,6419	g_{12}	2,3539
μ_3	1,2106	f_1	0,7293	g_{21}	0,7028
λ_1	0,1887	f_2	-0,03194	g_{22}	0,0715
λ_2	-0,0674	c	-0,0067		
λ_3	0,1877				

В этих таблицах коэффициенты d, f описывают изгибные колебания вертикального стержня в двух плоскостях; c — крутильные колебания вертикального стержня, g — изгибные колебания пластины.

Найденные коэффициенты используются для восстановления форм колебания разложенной ПСБ.

В качестве проверки моделирование рассматриваемого КА было также осуществлено с помощью метода конечных элементов. В результате были получены следующие собственные частоты:

$$\omega_1 = 0,70 \text{ Гц}, \ \omega_2 = 1,28 \text{ Гц}.$$

В работе [10] приводятся результаты исследования свободных колебаний конструкции МКС. Исследования были проведены с использованием данных измерений низкочастотного акселерометра MAMS (Microgravity Acceleration Measurement System — Система измерения микрогравитационных ускорений). Анализ полученных в работе [10] результатов показал, что основные возмущения конструкции МКС наблюдаются в диапазоне частот 0,701—1,35 Гц.

Порядок найденных собственных частот колебаний рассматриваемой модели КА совпадает с порядком действительных собственных частот колебаний конструкции МКС. Таким образом, метод, предложенный в настоящей работе, может быть использован для определения собственных частот и форм колебаний составной упругой конструкции различной компоновки.

Потенциальная энергия П системы, входящая в (1.15), будет иметь вид:

$$\Pi = S \cdot f(x, y, t) + M_S \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x}, \tag{2.7}$$

где S — вектор импульса, появляющегося при фиксации створок ПСБ: M_S — вектор импульсного момента, возникающего при фиксации створок ПСБ: $f(x, y, t)$ — вектор упругих перемещений ПСБ. С учетом (1.9), (2.7) принимает вид:

$$\begin{aligned}\Pi =& Sy_1 \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X_m(\frac{l_1}{2}) Y_n(y) + Sy_2 \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X_m(\frac{l_2}{2}) Y_n(y) + \\ &+ Sy_3 \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X_m(\frac{l_3}{2}) Y_n(y) + \\ &+ M_{S1} \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X'_m(\frac{l_1}{2}) Y_n(y) + M_{S2} \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X'_m(\frac{l_2}{2}) Y_n(y) + \\ &+ M_{S3} \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X'_m(\frac{l_3}{2}) Y_n(y).\end{aligned}$$

Здесь $g_1(t)$ — функция от времени в разложении (1.9), описывающая колебания пластины: $g_{m,n}$ — коэффициенты в разложении собственных форм колебаний пластины (табл. 2.2 для первой собственной частоты, табл. 2.3 для второй собственной частоты).

Используя (1.15), характеристики КА (табл. 2.1), а также коэффициенты в разложении собственных форм (табл. 2.2, табл. 2.3), получим систему дифференциальных уравнений движения КА, которая может быть легко проинтегрирована любым численным методом.

Графический результат численного интегрирования полученной системы дифференциальных уравнений движения КА при заданной начальной скорости $\dot{g}_1(0) = -0,2426$ м/с (скорость створок ПСБ после фиксации) представлен ниже (рис. 2.4—2.7)

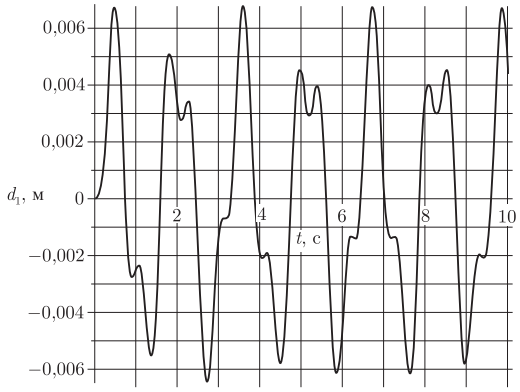


Рис. 2.4. Колебания вертикального стержневого участка системы

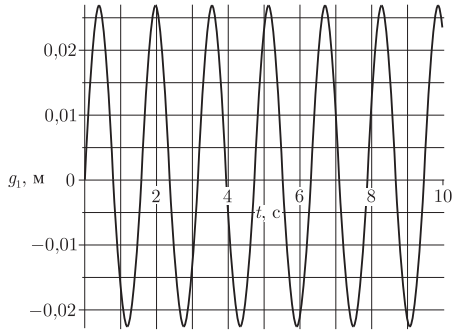


Рис. 2.5. Колебания пластины ПСБ

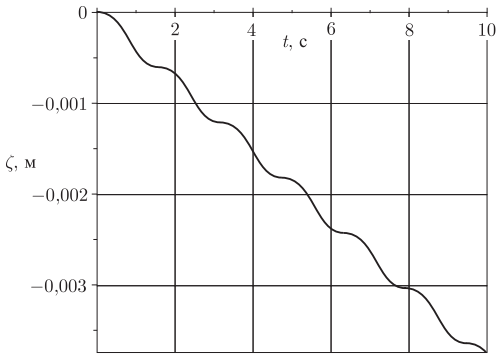


Рис. 2.6. Смещение системы вдоль оси цилиндра

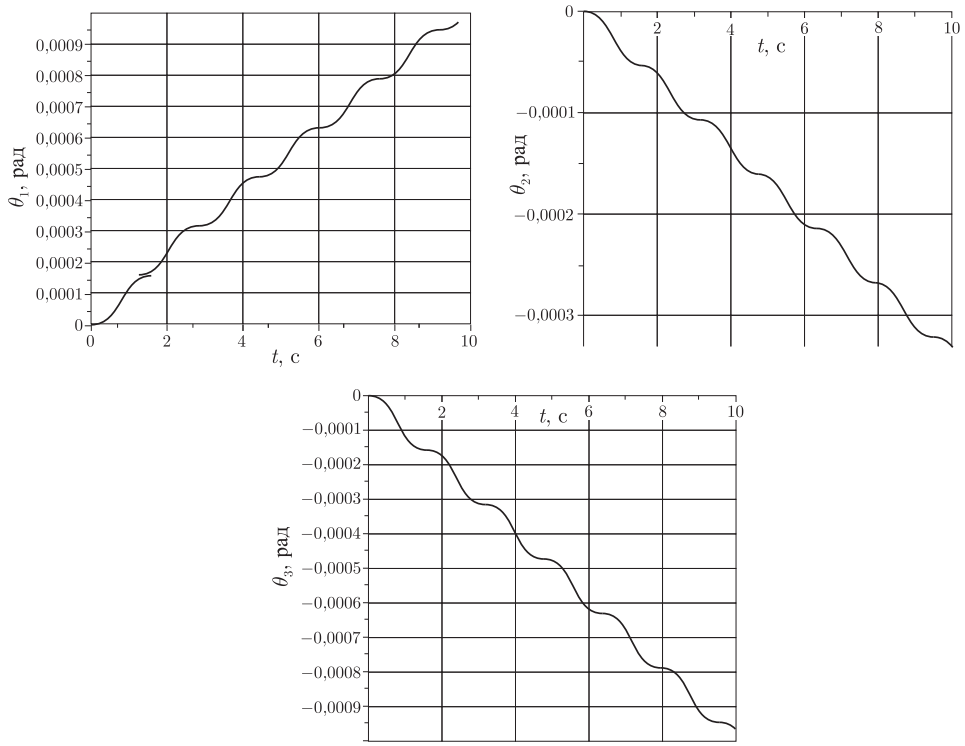


Рис. 2.7. Поворот системы относительно инерциальных осей цилиндра

Как видно из рис. 2.4 и 2.5, колебания упругих элементов системы (вертикальный стержень и пластины) являются свободными и незатухающими, т. к. при моделировании движения системы не учитывались диссипативные силы.

Анализируя результаты (рис. 2.6 и 2.7), полученные для поступательного и вращательного движения цилиндрического основания системы (корпус КА), можно выработать решения по уменьшению (исключению) данного движения.

Вывод

Таким образом, при моделировании движения составной упругой конструкции с малыми деформациями возможно разложение движения системы на ортогональные формы отдельных ее элементов, соответствующие собственным частотам малых колебаний.

Моделирование упругих элементов телами с распределенными параметрами позволяет получить более точную математическую модель, описывающую движение механической системы. Предлагаемый метод определения собственных форм и частот колебаний конструкции позволяет свести систему дифференциальных уравнений движения системы в частных производ-

ных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это не только упрощает процедуру численного интегрирования уравнений движения, но и позволяет проводить качественный анализ возможных движений путем использования аналитически заданных форм колебаний.

Разработанный метод моделирования движения может быть использован для исследования колебаний в составной упругой системе, а также для выработки рекомендаций по их снижению.

Литература

[1] Хорошилов В.С. Механические модели движения космического аппарата с солнечной батареей // Известия АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 18—24.

[2] Докучаев Л.В., Климов О. П. Об устойчивости вращения твердого тела с гибкими элементами// Известия АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 10—15.

[3] Набиуллин М. К. Стационарное движение и устойчивость упругих спутников. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1990. 216 с.

[4] Мирович Л., Квинн Р.Д. Уравнение движения маневрирующего космического аппарата нежесткой конструкции // Аэрокосмическая техника. 1988. № 6. С. 82—96.

[5] Ганиев Р.Ф., Ковальчук П.С. Динамика систем твердых и упругих тел. Резонансные явления при нелинейных колебаниях. М.: Машиностроение, 1980. 208 с.

[6] Борисов М.В. Применение метода Релея — Ритца для нахождения собственных частот и форм колебаний сложной упругой системы // Студенческая наука аэрокосмическому комплексу: сборник трудов студентов и аспирантов факультета летательных аппаратов. Самара: СГАУ, 2001. Вып. № 7. С. 10–16.

[7] Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.

[8] Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

[9] Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1966.

[10] Беляев М.Ю., Завалишин Д.А., Сазонов В.В. Определение характерных частот упругих колебаний конструкции международной космической станции. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. М., 2008. № 86. 32 с.

[11] Shabana A.A. Dynamics of Multibody Systems. Cambridge; New York; Melbourne; Madrid; Cape Town; Singapore: Cambridge University Press, 2005.

[12] Sänger N., Betch P. On the Use of Geometrically Exact Shells in a Conserving Framework for Flexible Multibody // Proceedings of the 4th Asian Conference on Maltibody Dynamics 2008 (Seogwipo KAL Hotel, Jeju, Korea, 2008). Seoul: The Korean Sosiety of Mechanical Engineers, 2008, pp. 399-408.

Поступила в редакцию 06/*IV*/2009;
в окончательном варианте — 06/*IV*/2009.

DERIVATION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOVEMENT OF COMPLEX ELASTIC SYSTEM

© 2009 A.A. Avramenko, M.V. Borisov[2]

The purpose of the article is to receive a mathematical model of movement of the complex elastic system. The normal modes and frequencies are searched by the decomposition of vibrations on the modes of stationary elements of the system. It allows to transform partial differential equations of movement in ordinary differential equations. The movement of a space craft which consists of elastic large size elements (solar panels) is modeled.

Key words and phrases: complex elastic system, normal frequencies of vibrations, normal modes of vibration, differential equations of movement, elastic space craft, solar panels, Reyleigh — Ritz method, principle of Hamilton — Ostrogradskii.

Paper received 06/*IV*/2009.
Paper accepted 06/*IV*/2009.

[2]Avramenko Aleksandr Alekseevich (avramenko_a_a@mail.ru.ru), Borisov Maksim Vladimirovich (borisov.makson@rambler.ru), Dept. of Theoretical Mechanics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russia.